6. OPTIKA FOURIER

6.2. OPTIKA FOURIER

1. Transformasi Fourier 1D (Review)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\infty} A(k)\cos kx\,dx + \int_0^{\infty} A(k)\sin kx\,dx\right]$$

$$A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos kx'\,dx' \;;\; B(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\sin kx'\,dx'$$

Dalam bentuk fungsi kompleks :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{-ikx}\,dk$$

F(k) adalah transformasi Fourier dari f(x)

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx}\,dx$$

$$F(k) = \mathscr{F}\{\, f(x)\}$$

$$x' = x$$

- Karena *F(k)* adalah fungsi kompleks :

$$F(k) = A(k) + iB(k)$$

A(k) bagian riil dari *F(k)* dan *B(k)* bagian imajinernya.

- Dalam bentuk amplitudo dan fasa :

$$F(k) = |F(k)| e^{i\phi(k)}$$

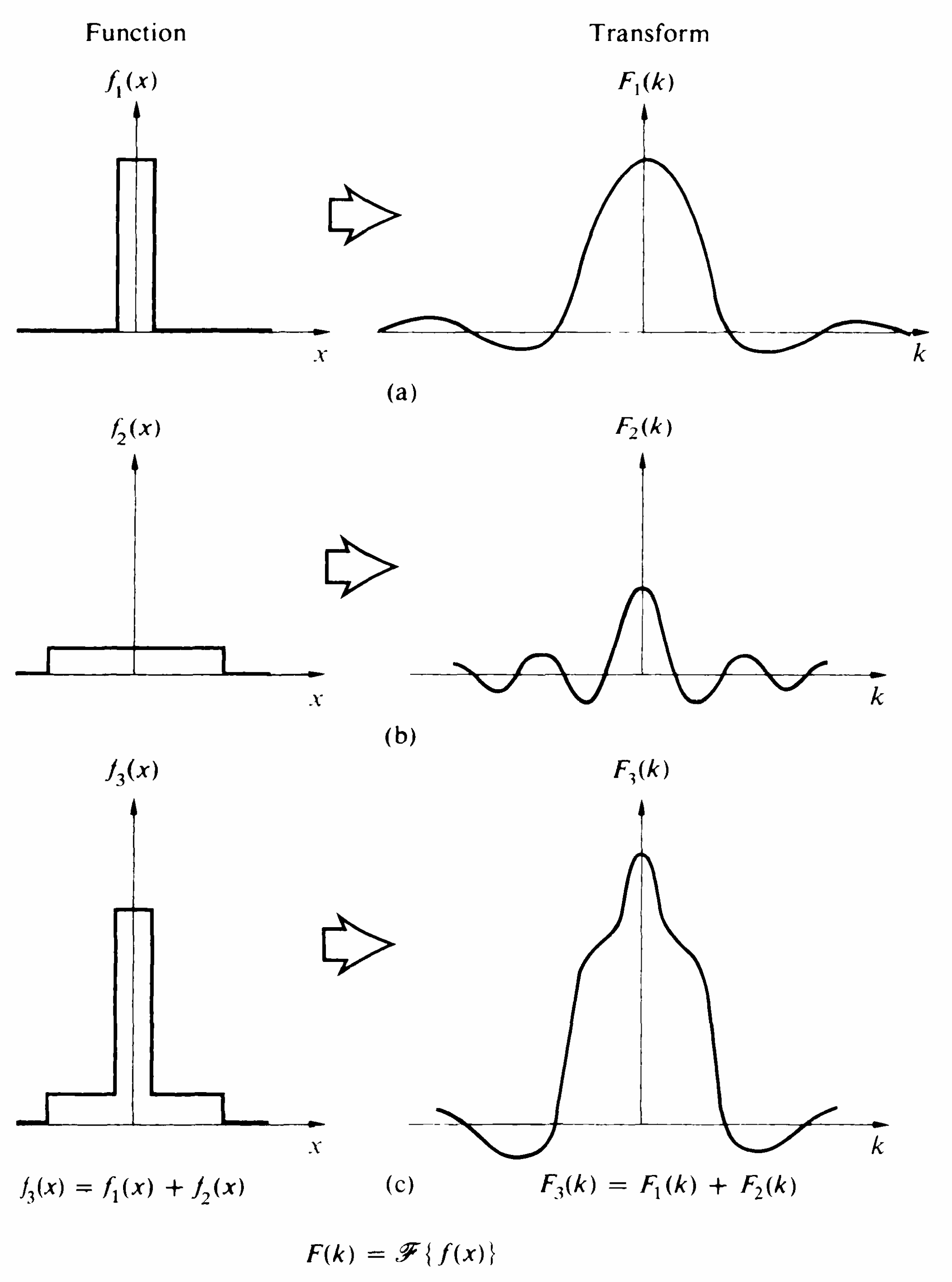
- Invers Fourier Transform

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{ F(k)\} = \mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}\{f(k)\}\}$$

- FT untuk fungsi waktu, f (t) → f(ω)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \; ; \; F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt$$

Contoh :
Campuran fungsi (komposit) dan FT-nya



Fungsi Gauss (Distribusi Gauss 1D)

$$f(x) = C\, e^{-ax^2} \quad ;\ C = \sqrt{\pi / a}$$

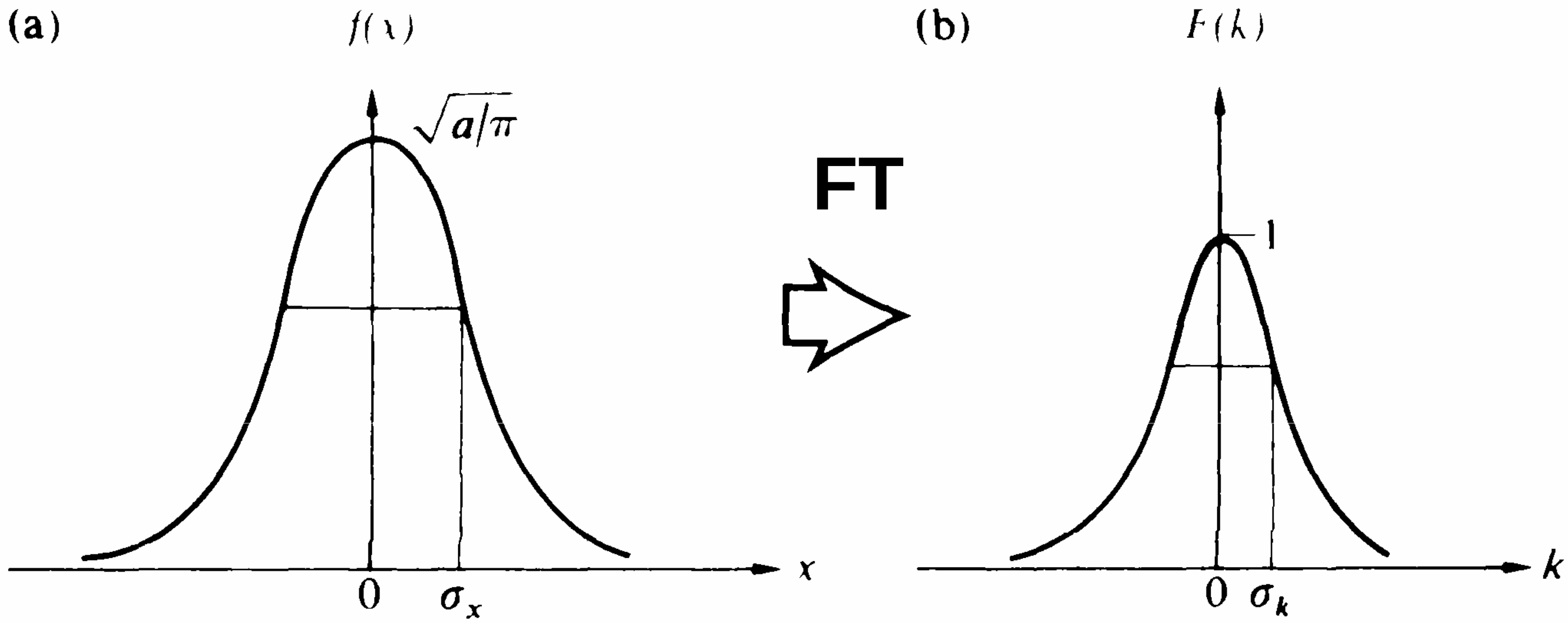
FT-nya :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C\, e^{-ax^2} \right) e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C\, e^{-ax^2 + ikx} \right) dx$$

$$= \frac{C}{\sqrt{a}} e^{-k^2/4a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta \quad ; \beta = x\sqrt{a} - ik / 2\sqrt{a}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{a}} e^{-k^2/4a} \sqrt{\pi}$$

$$= e^{-k^2/4a}$$



Fungsi Gauss (a) dan FT-nya (b)

2. FT 2D

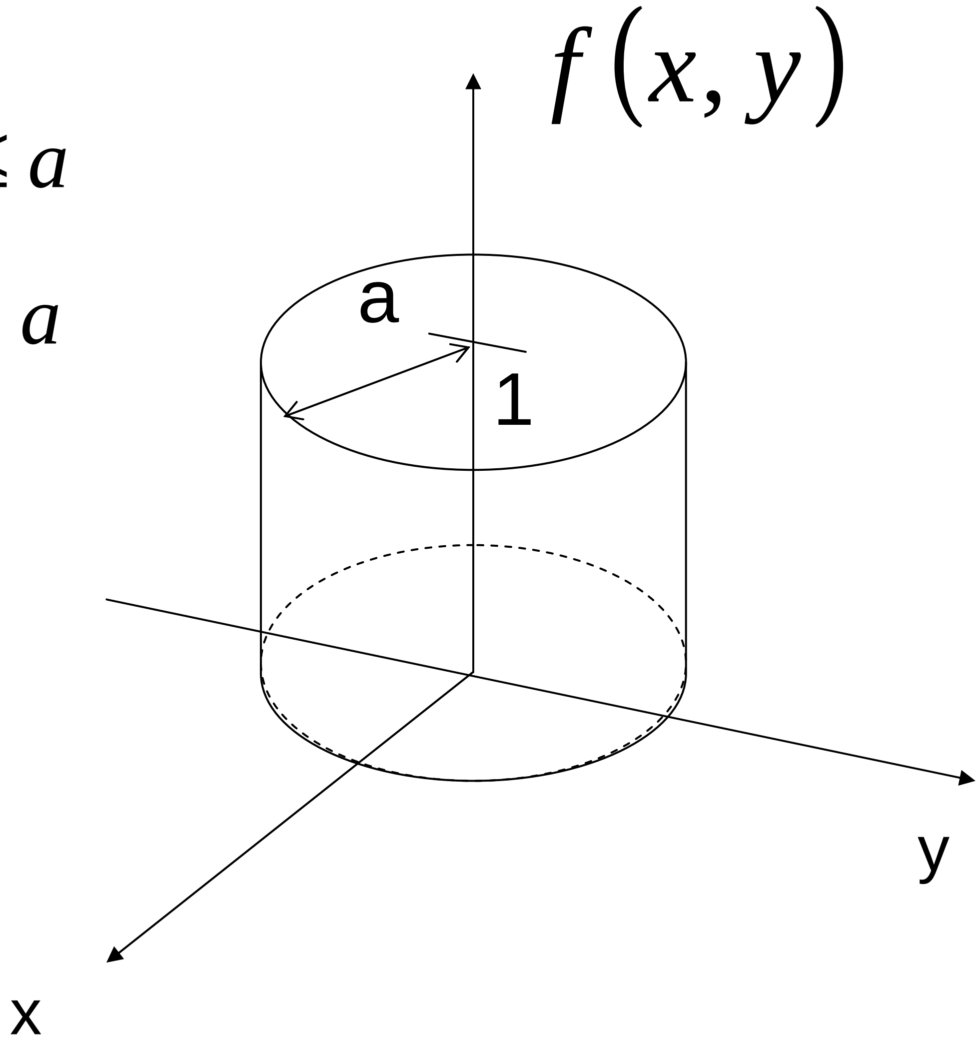
$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k_x,k_y)e^{-i(k_x x+k_y y)}\,dk_x dk_y$$

$$F(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{i(k_x x+k_y y)}\,dx\,dy$$

dengan kx dan ky adalah frekuensi sudut ruang (*angular spatial frequencies*) dari sumbu-x dan sumbu-y

FT Fungsi Silindris

$$f(x,y)=\begin{cases}1 \;;\; \sqrt{x^2+y^2}\le a\\ 0 \;;\; \sqrt{x^2+y^2}>a\end{cases}$$



$$k_x = k_\alpha \cos\alpha$$

$$k_y = k_\alpha \sin\alpha$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Fourier Transform-nya

$$F\left(k_\alpha,\alpha\right)=\int_{r=0}^{a}\left[\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{ik_\alpha r\cos(\theta-\alpha)}d\theta\right] r\,dr$$

Karena fungsinya simetris, maka FT-nya juga simetris, sehingga F(k_α,α) tidak bergantung pada α.

$$F\left(k_\alpha\right)=\int_{0}^{a}\left[\int_{0}^{2\pi} e^{ik_\alpha r\cos\theta}d\theta\right] r\,dr$$

$$=2\pi\int_{0}^{a} J_0\left(k_\alpha r\right) r\,dr$$

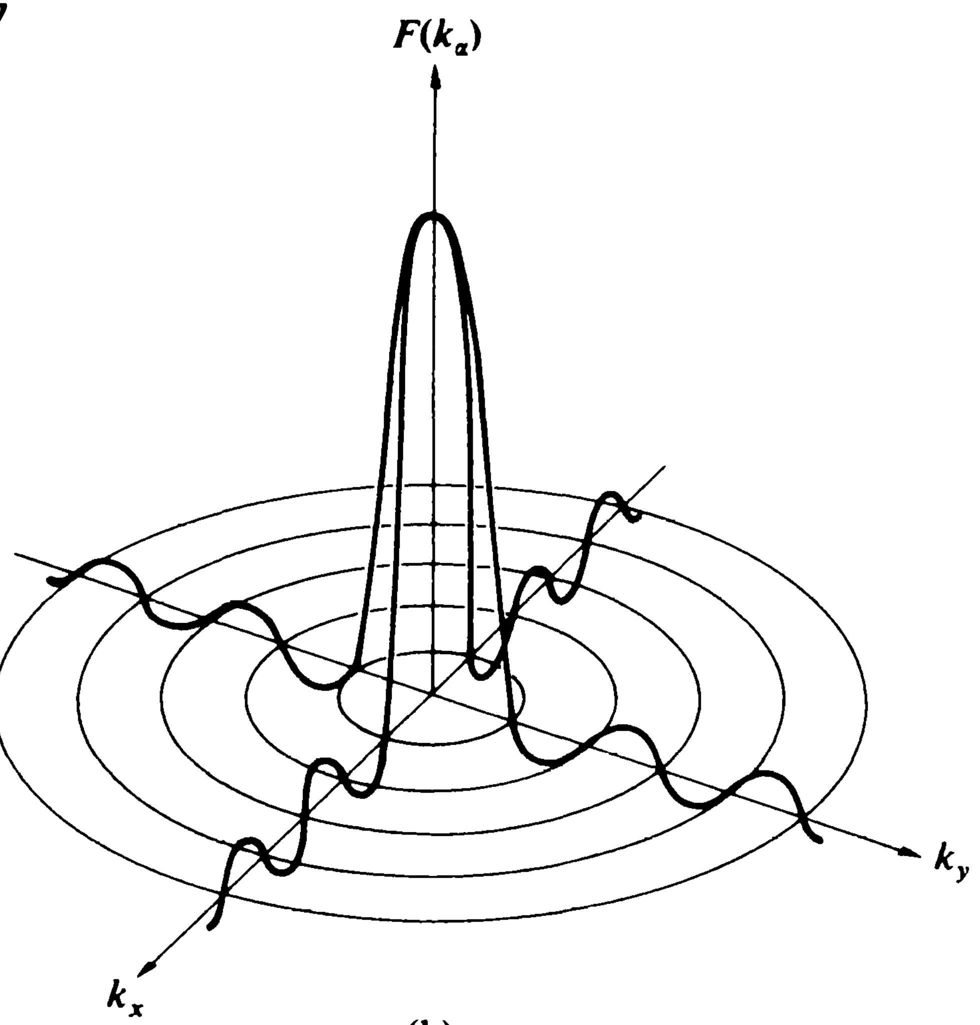
$J_0\left(k_\alpha r\right)$ Fungsi Bessel orde-nol

Definisikan : $w = k_\alpha r \rightarrow dr = k_\alpha^{-1} dw$

$$F(k_\alpha) = \frac{1}{k_\alpha^2} \int_{w=0}^{k_\alpha a} J_0(w)\, w\, dw$$

$$= \frac{2\pi}{k_\alpha^2} k_\alpha a\, J_1(k_\alpha a)$$

$$= 2\pi a^2 \left[\frac{J_1(k_\alpha a)}{k_\alpha a} \right]$$

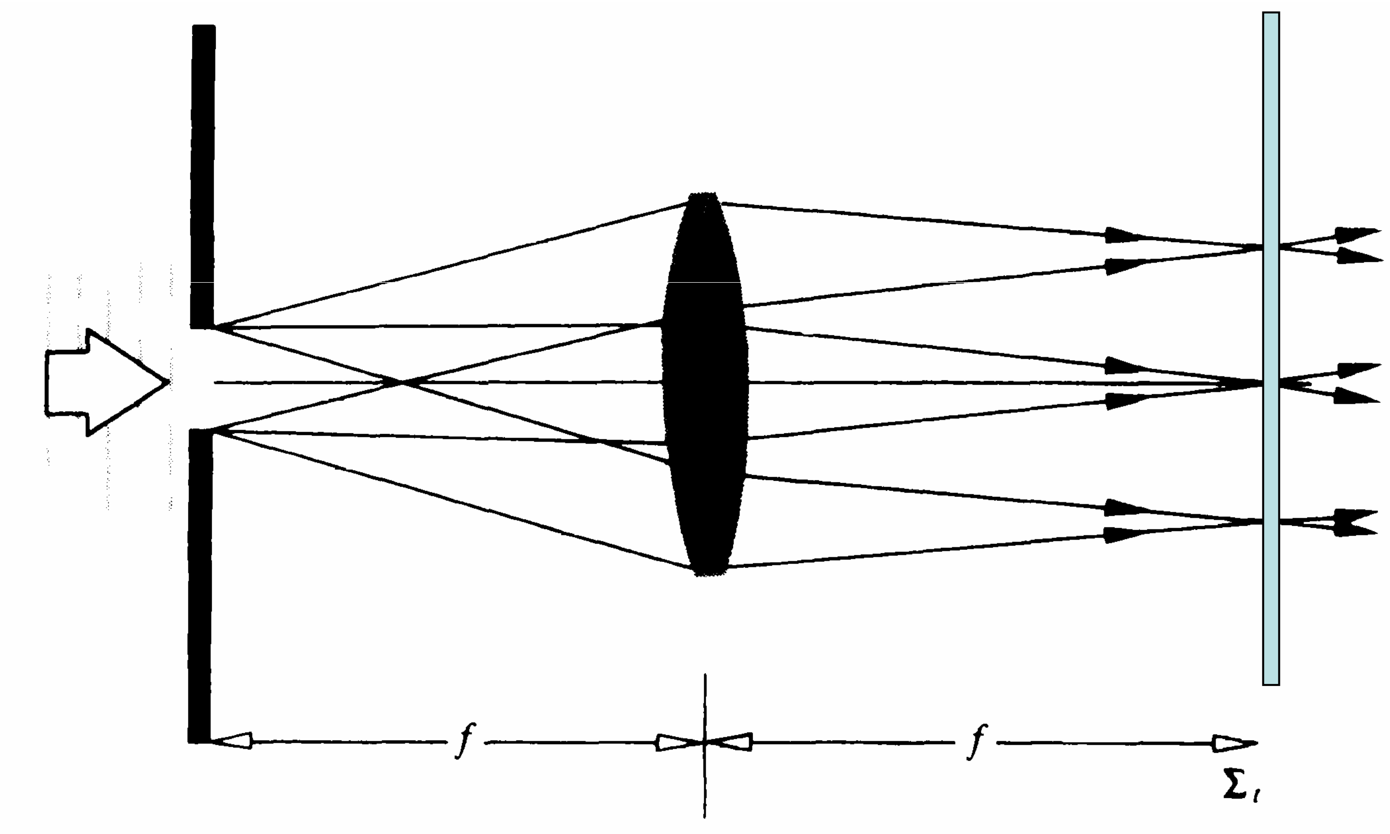


(b)

APLIKASI DALAM OPTIK

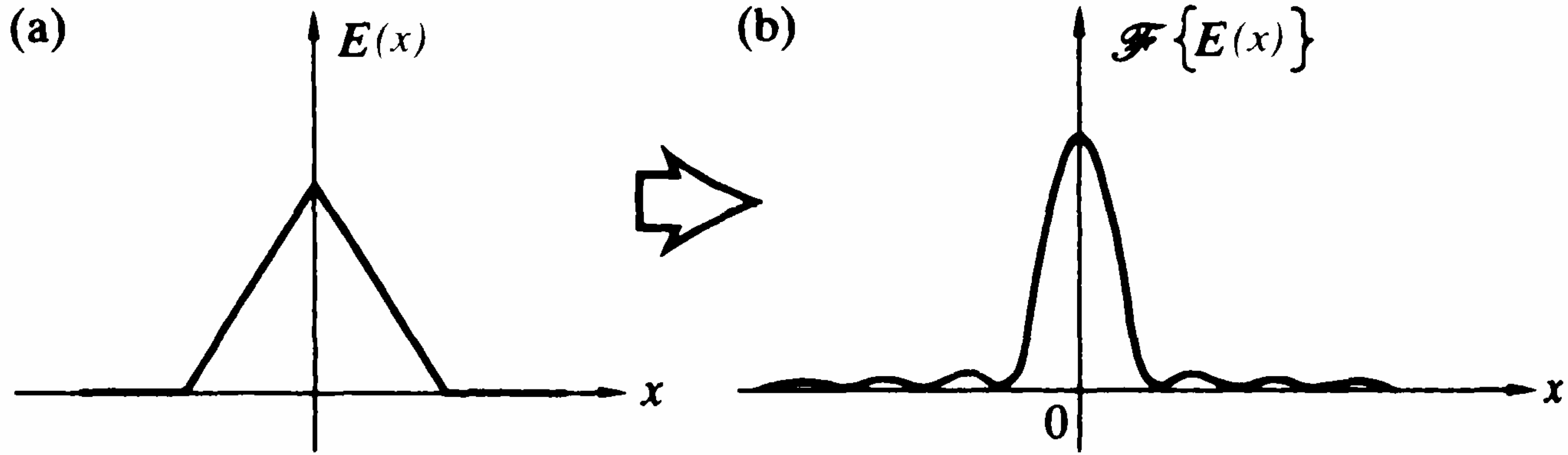
1. LENSA

Difraksi cahaya oleh celah sempit transparan melalui sebuah lensa konvergen membentuk pola difraksi pada layar (titik fokus lensa).



Distribusi medan listrik dari celah (fungsi apertur) ditransformasi oleh lensa menjadi pola difraksi.

Jika celah/objek memiliki kerapatan yang hanya bervariasi sepanjang satu sumbunya, maka profile transmisinya adalah segitiga.



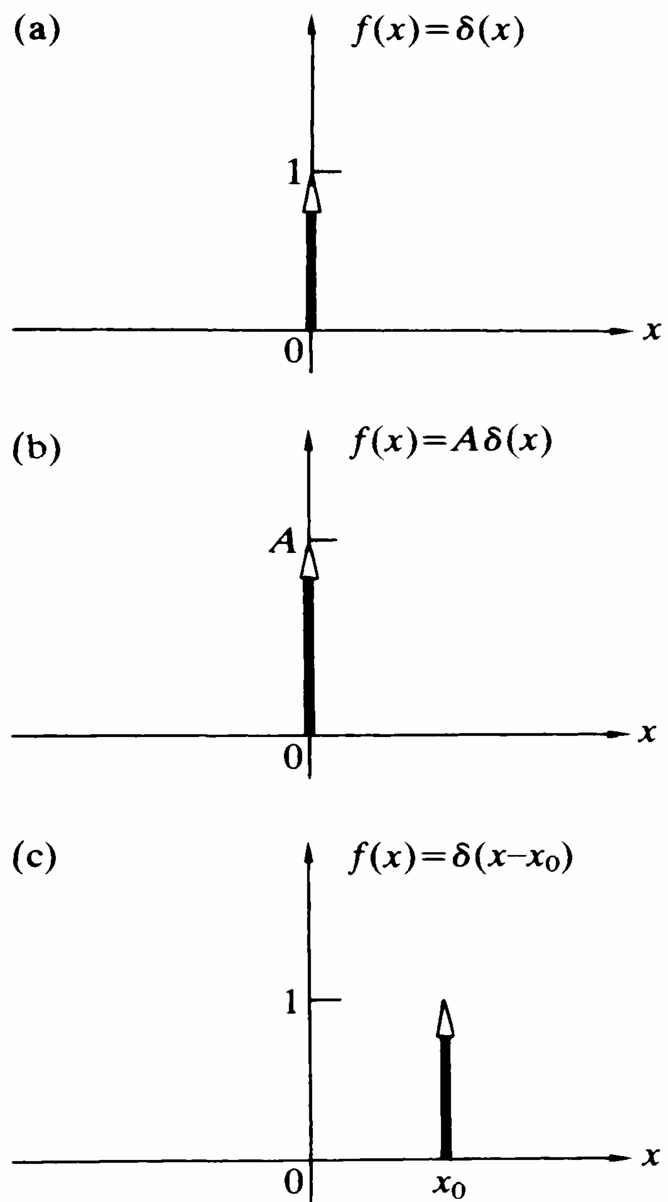
(a). Fungsi segitiga, dan (b) Transformasi Fourier-nya

FUNGSI DELTA DIRAC

- Banyak fenomena fisis terjadi pada durasi yang sangat pendek. Sehingga diperlukan fungsi Delta-Dirac
- Contoh : bagaimana respon rangkaian tertentu berperilaku jika diberi input arus singkat/pulsa.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \;\; ; \; x \neq 0 \\ \infty \; ; \; x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\, f(x)\,dx = f(x_0)$$

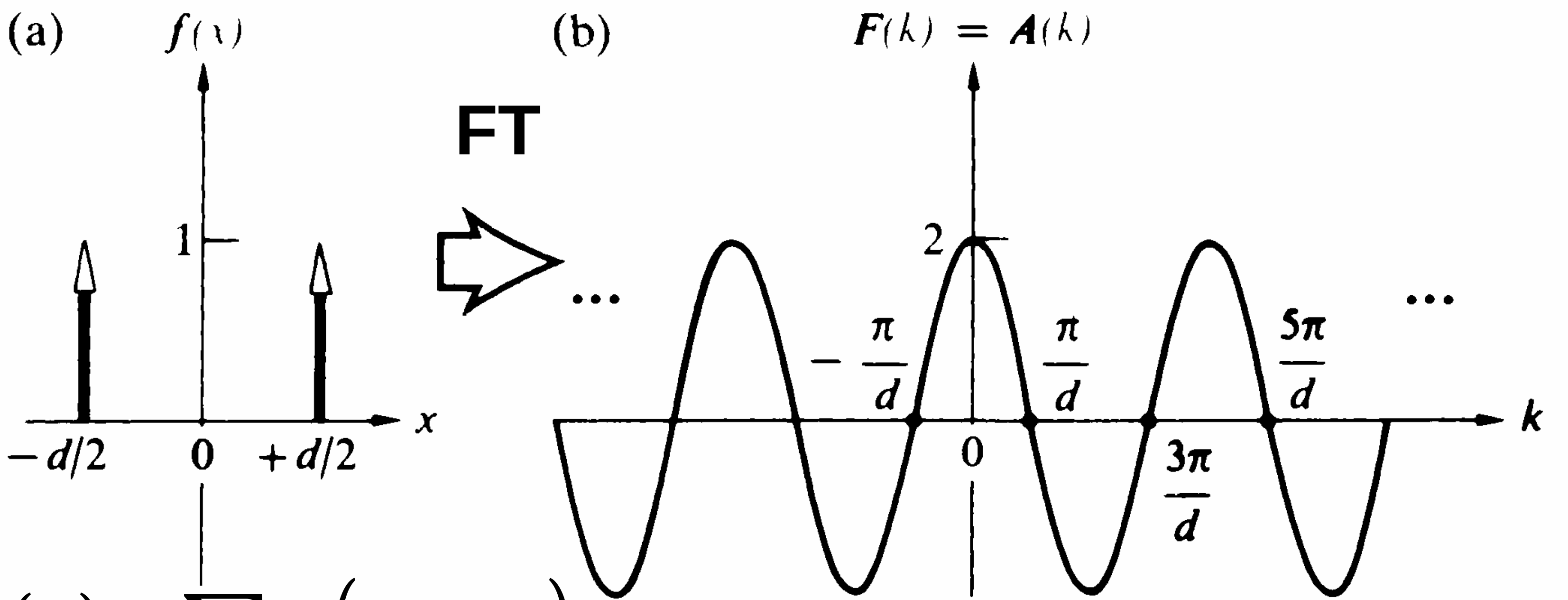
- Bentuk kompleks fungsi Delta-Dirac

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk$$

$$\mathscr{F}\{\delta(x - x_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) e^{ikx}\, dk$$

FOURIER TRANSFORM dapat merubah sinyal diskrit (spektrum) menjadi kontinu atau sebaliknya dengan fungsi Delta-Dirac.

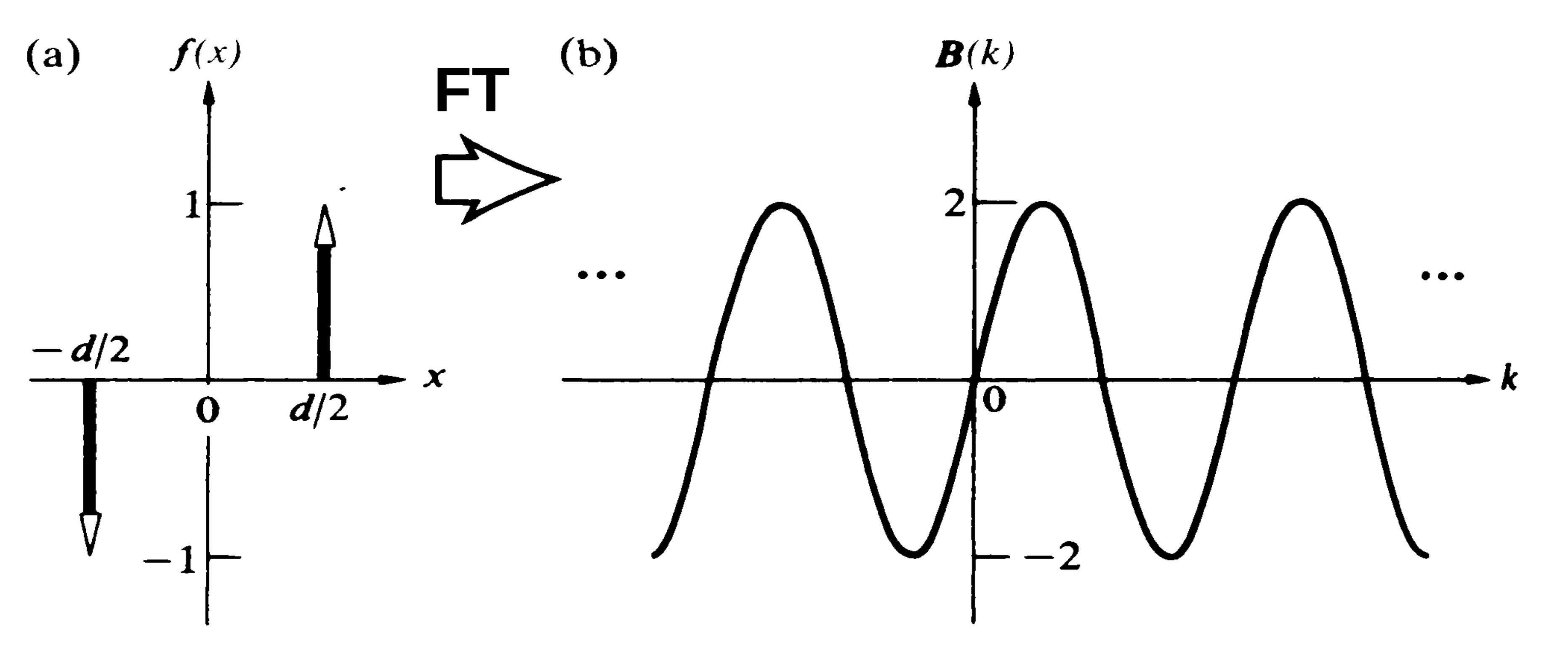
Contoh : 1. Fungsi Cosinus dan Sinus



$$f(x) = \sum_j \delta(x - x_j)$$

$$= \delta[x - (+d/2)] + \delta[x - (-d/2)]$$

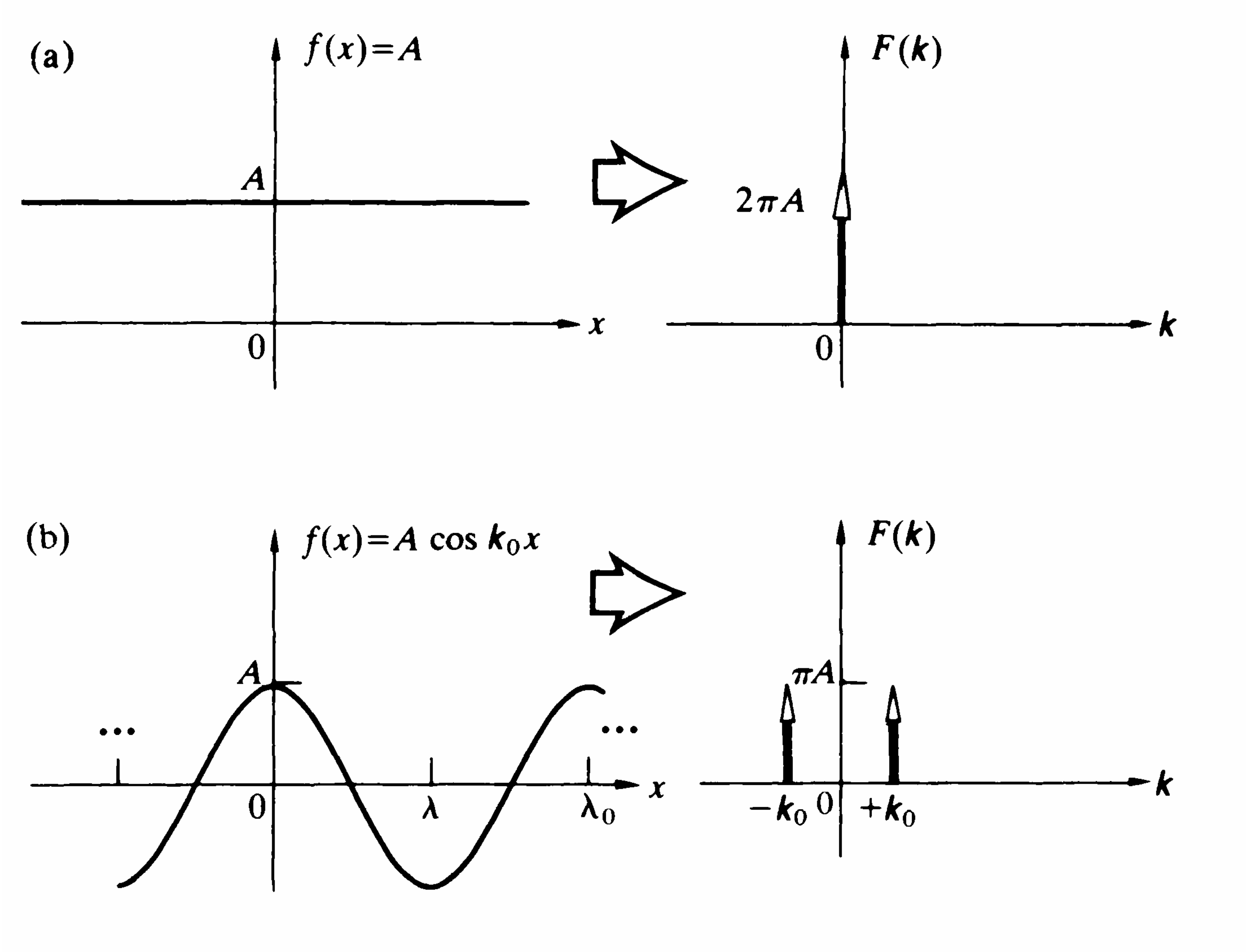
$$\mathscr{F}\{f(x)\} = e^{ikd/2} + e^{-ikd/2} = 2\cos(kd/2)$$



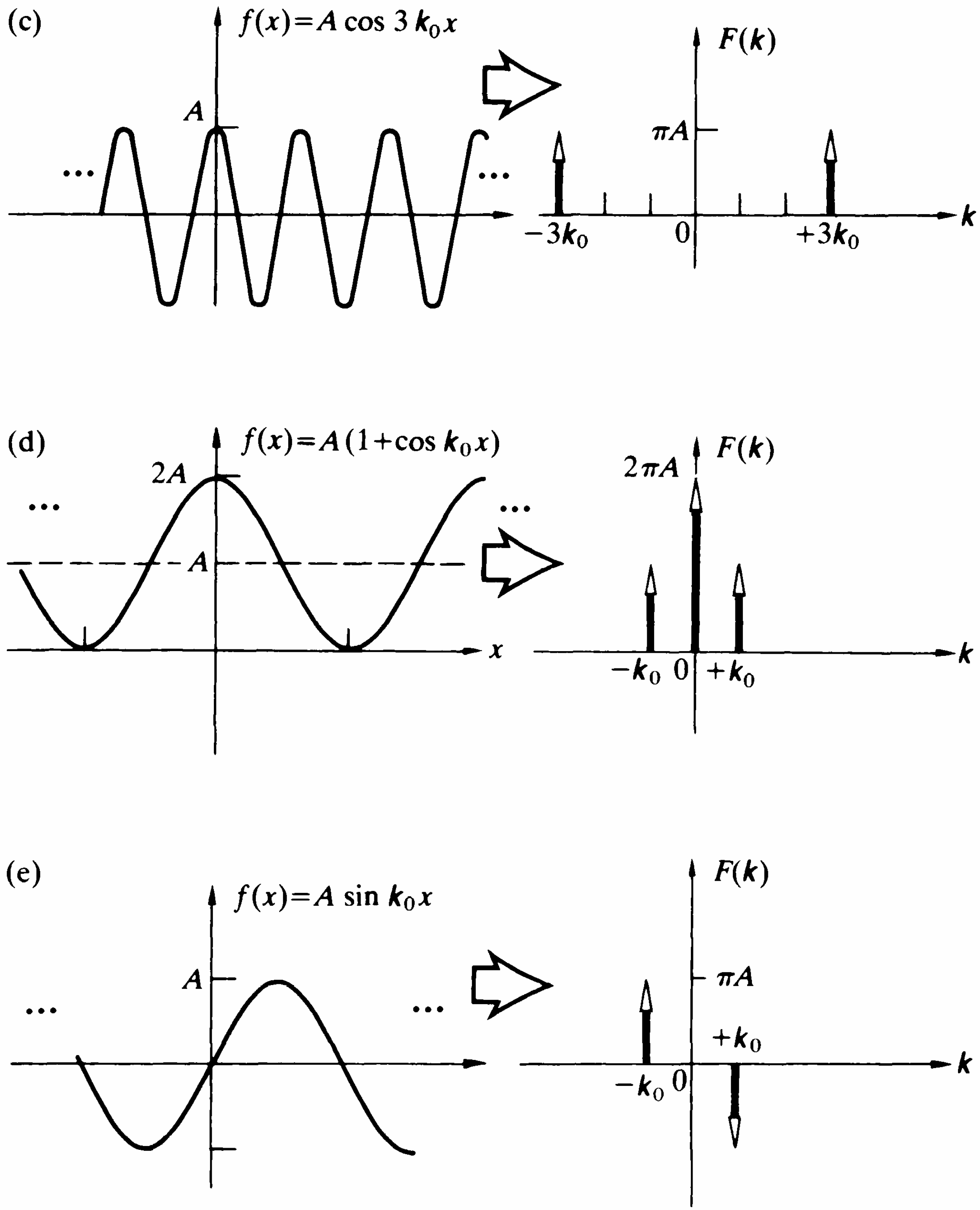
$$f(x) = \delta[x - (+d/2)] - \delta[x - (-d/2)]$$

$$\mathscr{F}\{f(x)\} = e^{ikd/2} - e^{-ikd/2} = 2i\sin(kd/2)$$

2. FT beberapa fungsi



2. FT beberapa fungsi (lanj.)



2. Sistem Linier

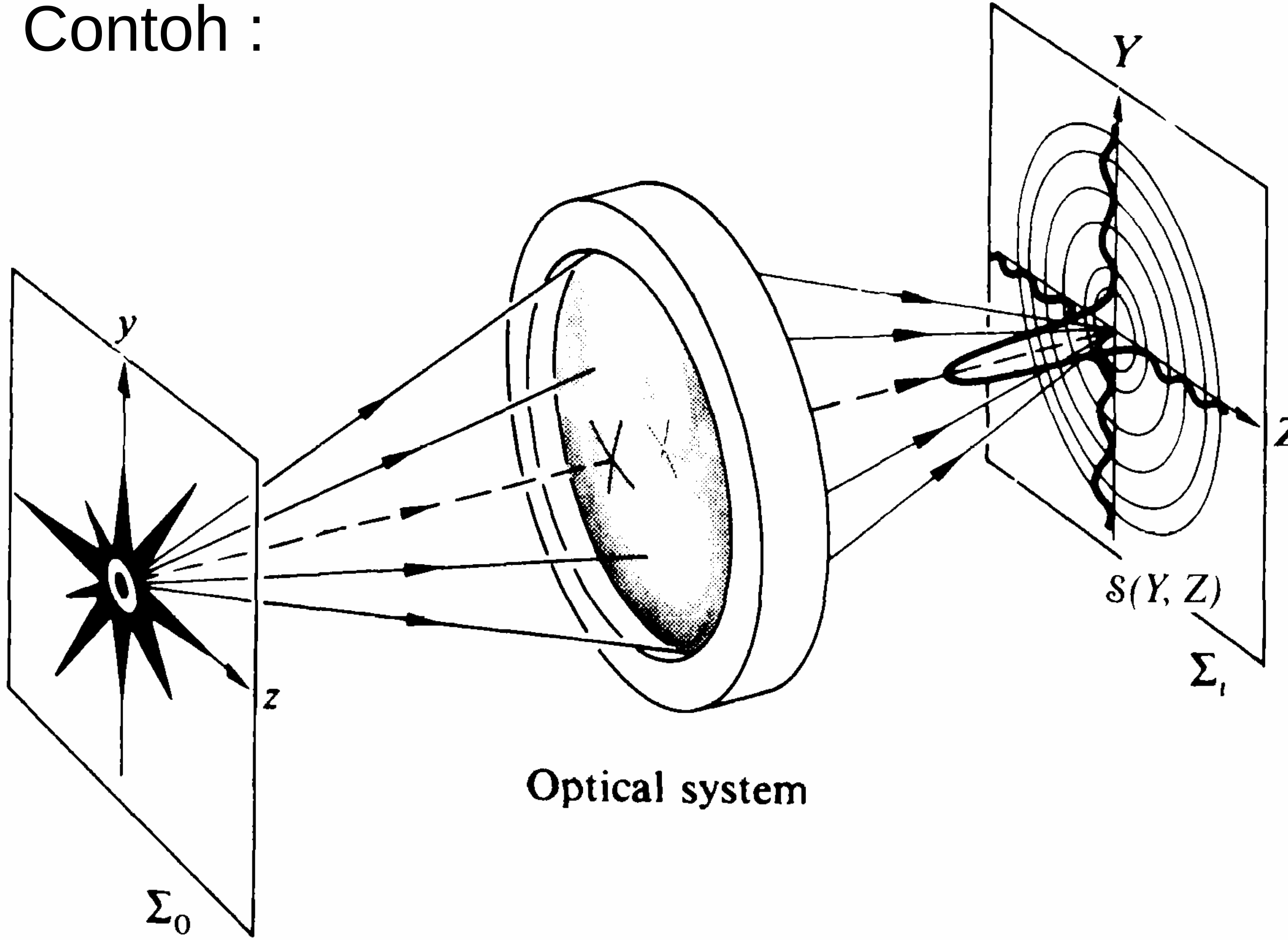
- Teknik Fourier menyediakan kerangka kerja yang elegan untuk menggambarkan pembentukan citra.
- Kunci dari analisis adalah konsep sistem linier, yang menggambarkan hubungan input-output.

- Jika sinyal input f(y,z) melewati suatu sistem optik menghasilkan output g(Y,Z). Sistem disebut linier jika :
  - Mengalikan fungsi f(y,z) dengan suatu konstanta a menghasilkan ag(Y,Z)
  - Jika inputnya $af_1(y,z)+ bf_2(y,z)$ menghasilkan output $ag_1(Y,Z)+ bg_2(Y,Z)$, dimana $f_1(y,z)$ dan $f_2(y,z)$ mengenerate $g_1(Y,Z)$ dan $g_2(Y,Z)$

Secara umum ditulis :

$$g(Y,Z) = \mathcal{L}\{f(y,z)\}$$

Contoh :



Optical system

Fourier Transform dalam kasus Difraksi

1. Celah tunggal 1D

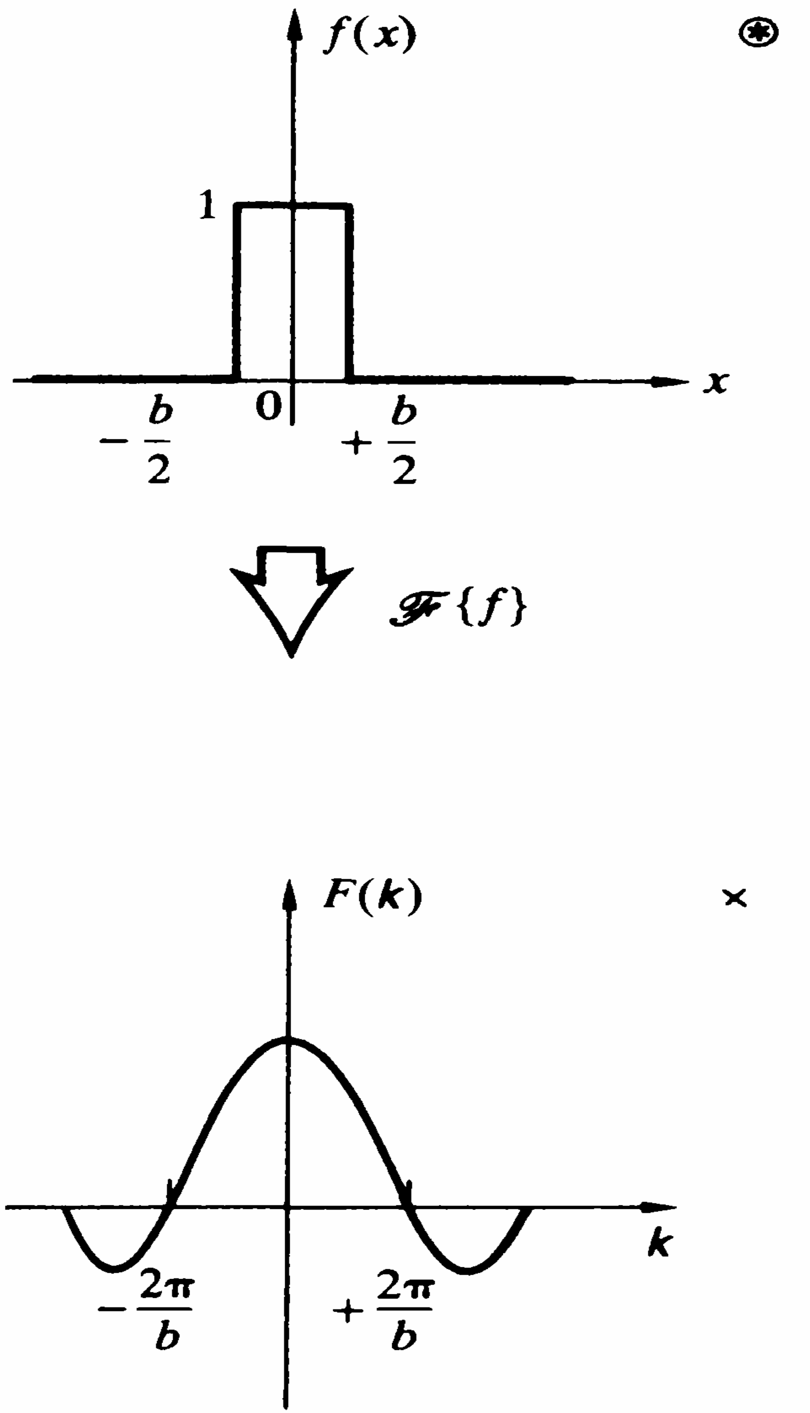
$$A(z) = \begin{cases} A_0 & ; |x| \le b/2 \\ 0 & ; |x| > b/2 \end{cases}$$

$$E(k_z) = \mathscr{F}\{A(z)\}$$

$$= A_0 \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ik_z z}\, dz$$

$$= A_0 b \operatorname{sinc}(k_z b/2)$$

$$k_z = k \sin\theta$$



2. Celah tunggal 2D

$$A(y,z)=\begin{cases}A_0 & ;\ |x|\le b/2\\ 0 & ;\ |x|>b/2\end{cases}$$

$$E\left(k_y,k_z\right)= \quad \{A(y,z)\}$$

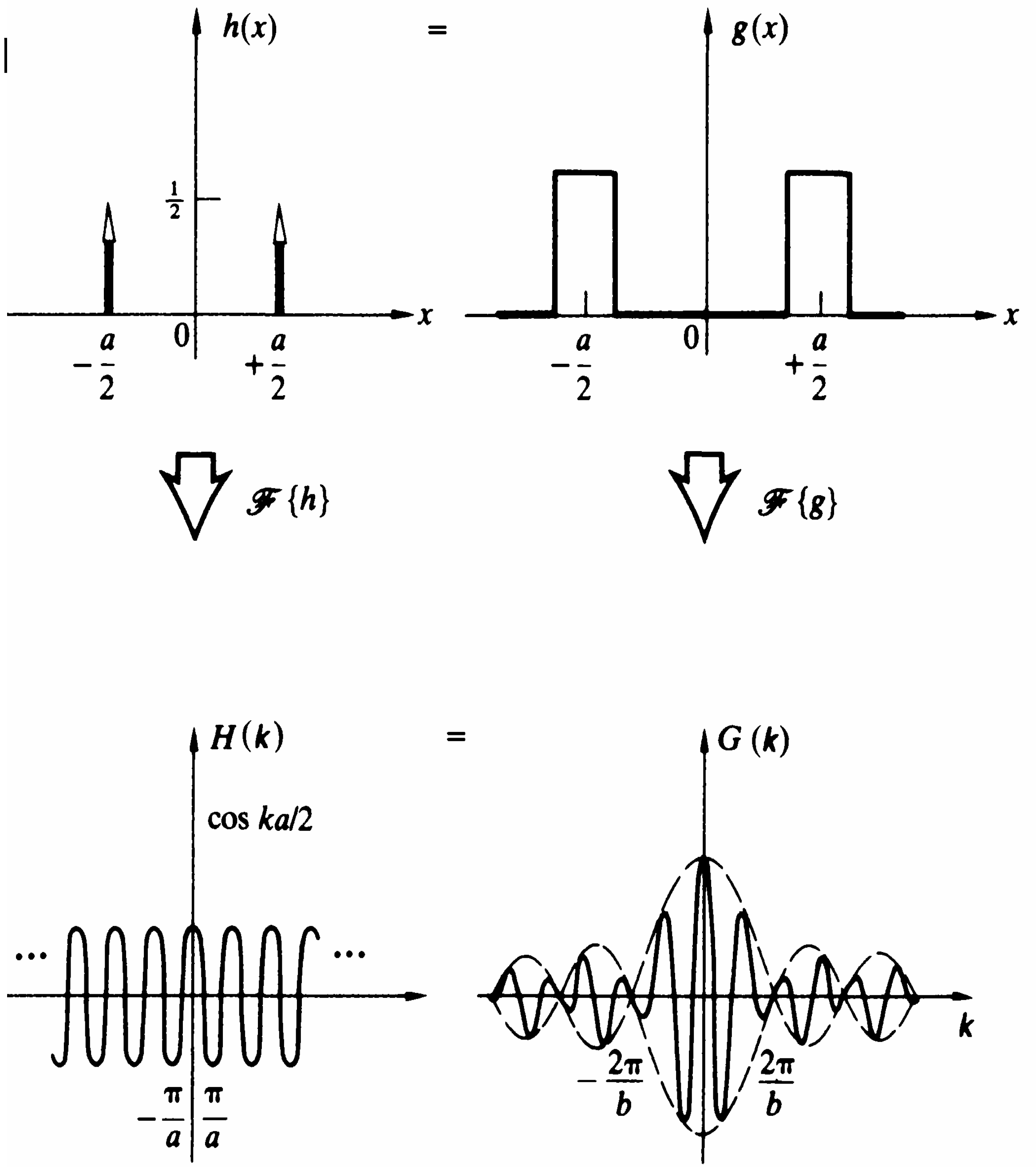
$$=A_0\int\limits_{y=-b/2}^{+b/2}\ \int\limits_{z=-a/2}^{a/2}A_0e^{i\left(k_y+k_z\right)z}\ dz$$

$$=A_0 ba\,\mathrm{sinc}\left(\frac{bkY}{2R}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{akZ}{2R}\right)$$

ba = luas celah

3. Eksperimen Your

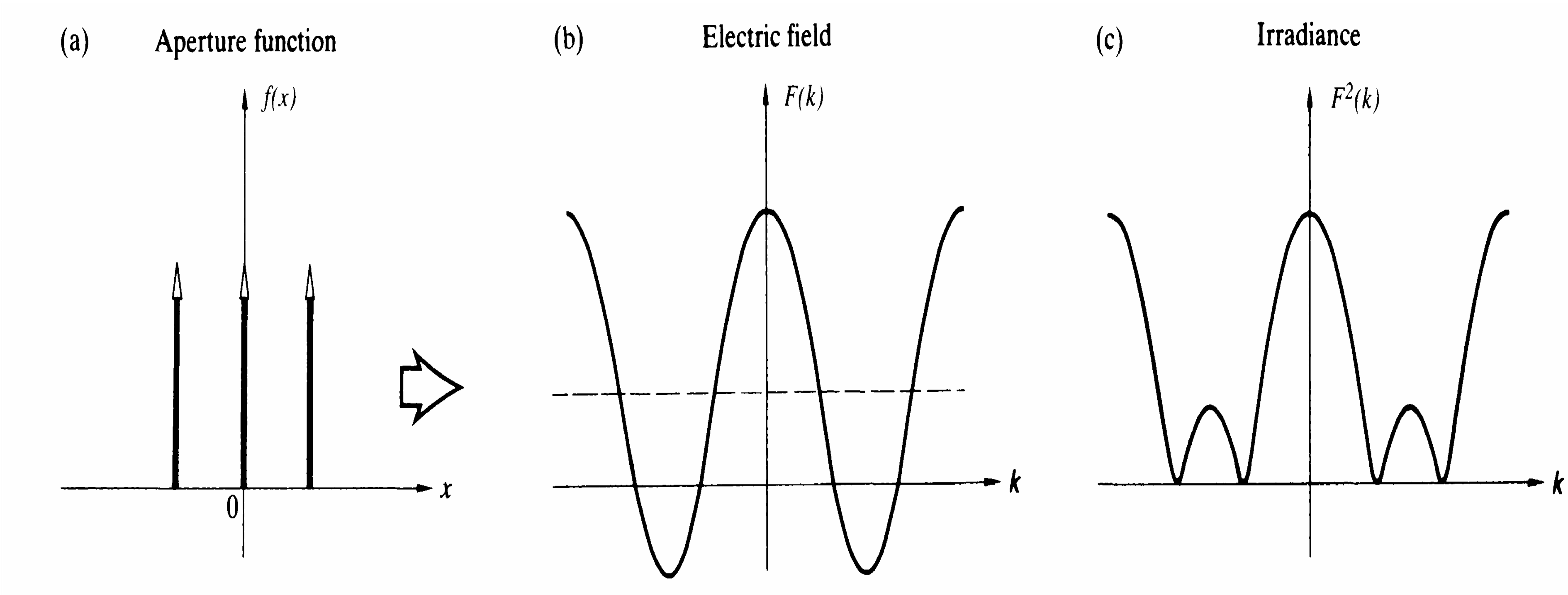
(Celah Ganda)



Fungsi apertur g(x) diperoleh dari konvolusi fungsi h(x).

G(k) adalah pola difraksi celah ganda (FT dari g(x)).

3. Tiga celah



Bandingkan pola difraksi secara analitik

(Bahasan 4. Difraksi)

Rujukan utama : E. Hechts,”Optics”, wesley, 2002

Bahasan Selanjutnya

HOLOGRAFI